

## 多元 LDPC 编码调制系统中低复杂度的似然概率生成算法

何光华<sup>1</sup>, 白宝明<sup>1,3</sup>, 马啸<sup>2</sup>, 黎晒<sup>1</sup>

(1. 西安电子科技大学 综合业务网理论与关键技术国家重点实验室, 陕西 西安 710071;  
2. 中山大学 信息科学与技术学院, 广东 广州 510275; 3. 空间微波技术重点实验室, 陕西 西安 710100)

**摘要:** 在采用多元 LDPC 码的通信系统中, 尤其当使用高阶调制方案时, 输入到译码器中的似然概率计算复杂度非常高。其主要原因是由于似然概率通常是关于信道输出的复杂函数, 其计算需已知信道参数。针对上述问题, 提出了一种低复杂度的近似似然概率生成算法。依据接收信号和星座点之间的欧氏距离, 将星座点所对应的有限域  $GF(q)$  上域元素的似然概率进行分块逼近, 能够以较低复杂度快速生成译码器所需要的概率度量。仿真结果表明, 所提出的分块似然概率逼近生成算法在译码性能上损失较小且极大降低了似然概率生成的计算复杂度, 是一种适用于高速多元 LDPC 译码器前端实现的候选算法。

**关键词:** 多元 LDPC 码; 似然概率; 译码器; 解调

中图分类号: TN911.21

文献标识码: A

文章编号: 1000-436X(2013)09-0084-08

## Low-complexity likelihood probability derivation algorithm for non-binary LDPC-coded modulation system

HE Guang-hua<sup>1</sup>, BAI Bao-ming<sup>1,3</sup>, MA Xiao<sup>2</sup>, LI Bing<sup>1</sup>

(1. State Key Lab of Integrated Service Networks, Xidian University, Xi'an 710071, China; 2. School of Information Science and Technology, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China; 3. Science and Technology on Space Microwave Laboratory, Xi'an 710100, China)

**Abstract:** The derivation of likelihood probabilities which are sent into the decoder in many LDPC-coded modulation systems is a challenging task especially when high-order modulations are used. This is because likelihood probabilities are usually complicated functions of the channel output and their calculation also requires knowledge of the channel parameters. To this end, a low-complexity likelihood probability derivation algorithm was proposed. Also, the Euclidean distance between the received signal and the constellation points was considered to divide the constellation points into two signal sets. Simulation results show that the proposed algorithm provides good trade-offs between performance and complexity, making it a good candidate for the hardware implementation of the front-end in the non-binary LDPC decoders.

**Key words:** non-binary LDPC codes; likelihood probabilities; decoder; demodulations

### 1 引言

多元 LDPC 码最早由 Gallager 基于同余模算术基础上提出, 同二元 LDPC 码一样, 它是一类校验矩阵为稀疏矩阵的线性分组码<sup>[1]</sup>。在文献[2]中, Davey 与 MacKay 提出了定义在有限域上的多元 LDPC 码。此外, 他们还说明了多元 LDPC 码比二元 LDPC 码具有更好的性能, 具体表现在: 能消除

小环尤其是四环对译码性能的瀑布区收敛性的影响, 从而具有更好的纠错效能; 在无线信道和网络信道中的抗突发错误能力更强; 适合高速率和高频谱效率的传输, 即非常适宜与高阶调制方案及多天线系统结合, 可以设计高效的单/多层编码调制系统<sup>[3-5]</sup>。在多元 LDPC 码的构造研究上, SHU Lin 等人进行了广泛的研究, 并提出了编码简单、性能较优且具有低错误平层的构造方法<sup>[6-8]</sup>。

收稿日期: 2012-10-22; 修回日期: 2013-03-08

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(“973”计划)基金资助项目(2012CB316100); 国家自然科学基金资助项目(61172082, 61201140); 空间微波技术重点实验室开放课题基金资助项目(9140C530401120C53201)

**Foundation Items:** The National Basic Research Program of China (973 Program)(2012CB316100); The National Natural Science Foundation of China(61172082,61201140); The Fund of National Key Laboratory Foundation of China(9140C530401120C53201)

在多元 LDPC 的译码方面, MACKAY 和 DAVEY 提出一种比  $q$  元和积译码算法 (QSPA) 更为简单有效的译码算法, 即基于有限域的快速傅里叶变换和积译码算法 (FFT-QSPA)<sup>[9]</sup>。但对高阶有限域而言, 其运算量仍很巨大, 硬件实现可行性较低。扩展最小和 (EMS, extended min-sum) 译码算法最早由 DECLERCQ 和 FOSSORIER 等提出<sup>[10]</sup>, 并后续由 VOICILA 等进行了修正工作<sup>[11]</sup>。WANG 和 DUAN 等人提出了在列重较大情况下的低复杂度的多元 LDPC 译码算法<sup>[12,13]</sup>。此外, SARKIS 和 GROSS 等人提出了多元 LDPC 随机译码算法<sup>[14]</sup>, 是一种被期望作为高速多元 LDPC 译码器高速实现的候选译码算法。

然而, 多元 LDPC 码的众多优点却是以其译码算法的高复杂度为代价。多元 LDPC 译码算法按输入译码器的译码度量类型可分为硬判决译码算法和软判决算法 2 类。软判决算法在译码性能上要优于硬判决算法, 其与硬判决算法本质区别是: 可靠性度量是依据接收序列计算而得, 这些度量值在后续运算中可以对传输序列做更精确的估计。

在多元 LDPC 软判决算法中, 似然概率是最为有效和精确的译码度量之一。在使用以似然概率为译码度量的译码器中, 精确地计算出输入译码器的先验概率值, 即解调过程是非常重要的环节。源信息序列的似然概率在各种信道下的计算是非常复杂的, 尤其是在采用高阶调制的情况下。主要原因是源信息序列的似然概率通常是关于信道输出的非线性函数。因此, 在译码器前端的实现上, 似然概率的精确计算通常需要复杂度较高的模块来完成, 这便造成译码器的高功耗和译码延迟等问题。综上所述, 为解决在高速多元 LDPC 通信系统中精确似然概率计算复杂度较高的问题, 需要寻求一种似然概率的近似计算方法。

本文提出了一种低复杂度的似然概率逼近算法, 该算法适用于高阶调制 (例如 256 QAM、64 QAM 和 16 QAM 等) 的多元 LDPC 编码调制系统。根据信号检测与估值理论以及其他文献在对数似然比 (LLR, log-likelihood ratio) 所做的研究<sup>[15,16]</sup>, 在解调时, 对星座图上所有星座点的精确似然概率所对应的有限域  $GF(q)$  上域元素的判断主要依据与接收信号较近的若干星座点。本文根据接收信号和星座点的欧氏距离为衡量标准, 将星座图上的所有星座点分为 2 部分, 其中最近的 4 个星座点采用一种查询 LUT (look-up table) 的方式, 可以得到极为逼近精确值

的似然概率; 对较远的星座点则提出一种近似的计算方法给出计算公式, 最终所生成的近似似然概率值和精确似然概率值的误差较小。本文的分块似然概率逼近算法具有一般性, 仿真结果表明: 所提出的算法在距离接收信号较近的 4 个星座点上的似然概率计算上, 极为逼近精确似然概率值; 在距离接收信号较远的其余星座点上, 和其精确似然概率值之间误差较小。在译码性能上, 与常规解调所得的精确似然概率值相比, 损失较小。此外, 本文所提出的分块似然概率逼近算法的复杂度非常低, 有利于硬件实现, 可以降低译码器的译码延迟并降低译码器的功耗。

## 2 多元 LDPC 码、系统模型及似然概率定义

### 2.1 多元 LDPC 码的定义

令  $GF(q)$ ,  $q=2^p$ , 表示一个特征为 2 的有限域,  $p$  为正整数。一个定义在  $GF(q)$  上的  $q$  元 LDPC 码  $C$  可由一个稀疏校验矩阵  $H$  给出,  $H = [h_{ij}]_{m \times n}$ ,  $h_{ij} \in GF(q)$ 。令  $v = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$  表示  $C$  中一个码字, 则有  $vH^T = 0$ , 即

$$\sum_{j=0}^{n-1} h_{i,j} v_j = 0, \quad i=0, 1, \dots, m-1 \quad (1)$$

式(1)中所有乘法和加法运算均定义在有限域  $GF(q)$  上。

在多元 LDPC 因子图中, 变量节点可取有限域  $GF(q)$  上的任一域元素值, 变量节点通过校验矩阵所规定的互联关系与校验节点相连。每次迭代译码过程中, 消息在变量节点和校验节点之间的边上传递。由于码字符号是有限域上  $GF(q)$  的任一符号, 因此在边上传递消息的长度也是  $q$ , 即消息向量所包含的变量数量为  $q$ 。

### 2.2 系统模型

#### 2.2.1 编码

假设  $C$  是定义在有限域  $GF(q)$  上的一个码, 码长为  $n$ , 信息位长度为  $k$ 。令  $u = (u_0, u_1, \dots, u_{k-1})$  为待传输的信息序列。则信息序列  $u$  通过多元 LDPC 编码器后变为码字  $v = (v_0, v_1, \dots, v_{n-1})$ , 其中,  $v_i \in GF(q)$ 。

#### 2.2.2 调制

假设采用大小为  $q$  的  $l$  维信号星座  $X = \{x_i\}$ , 其中,  $x_i = f(v_i)$ ,  $x_i$  是一个由星座映射规则  $f$  决定的  $l$  维符号。具体的映射规则由系统的星座映射方案

决定。以 64QAM 为例进行讨论，考虑一个定义在 GF(64)上的码字，则有  $l = 2$  且  $X = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7\}^2$ 。

### 2.2.3 信道模型

本文采用的是高阶调制，假设复信号向量  $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$  通过复加性高斯白噪声信号 (AWGN, additive white Gaussian noise) 信道进行传输，令复接收向量为  $y = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ ， $w_i$  为加性噪声，则有

$$y_i = x_i + w_i \tag{2}$$

其中， $w_i$  是均值为 0，方差为  $2s^2$  的复白高斯随机变量。

### 2.2.4 解调/译码

接收端接收到  $y$  后，开始尝试恢复传输信息序列  $u = (u_0, u_1, \dots, u_{k-1})$ 。常规方法是通过计算概率密度函数值，即  $Pr\{a | y\}$ ， $a \in GF(q)$ ，然后将计算得出的接收信号的先验概率送入译码器进行译码（译码算法采用以概率为译码度量的译码算法，如 QSPA、FFT-QSPA 或多元随机译码）。

### 2.3 似然概率的定义

令  $a_1, a_2, \dots, a_q$  表示有限域 GF( $q$ )上的  $q$  个元素。令  $P_j^{a_1}, P_j^{a_2}, \dots, P_j^{a_q}$  表示接收信号  $y$  中的第  $j$  个接收符号  $y_j$  的先验概率，其中， $0 \leq j < n$ ，易得

$$P_j^{a_1} + P_j^{a_2} + \dots + P_j^{a_q} = 1 \tag{3}$$

似然函数可由下式得出。

$$p(y_i | x_i) = \frac{1}{2ps^2} \exp\left(-\frac{\|y_i - x_i\|^2}{2s^2}\right) \tag{4}$$

注：式 (4) 为二维符号星座映射时的似然函数，当一维星座映射，上式变为

$$p(y_i | x_i) = \frac{1}{\sqrt{2ps}} \exp\left(-\frac{(y_i - x_i)^2}{2s^2}\right) \tag{5}$$

由式 (4) 可以看出，在计算似然概率时需要已知  $s$ ，接收信号和星座图上所有星座点之间的欧氏距离以及指数运算。在高阶调制下，其运算的复杂度非常高，若按照式 (4) 精确计算似然概率值，在进行译码器的硬件实现时，会造成较大的功耗和译码延迟。

## 3 所提出的算法

本节将以 64 QAM 为例，提出一种用于减少 2.3 节中所述似然概率计算复杂度的算法。第一种减少

似然概率计算复杂度的方法是以 Euclidean 距离为衡量，只较为精确地计算置信度较高的  $n_n$  个星座点的似然概率，其余星座点的似然概率采用一种近似计算方式。这种简化方式可以降低式 (4) 中计算全部星座点似然概率的复杂度，详细介绍将在 3.1 节和 3.2 节中给出。为进一步降低计算复杂度，本文通过使用 LUT 的方法来代替 2.3 节中对式 (4) 所进行的复杂操作。利用对称性，LUT 可被保持在很小的范围内，这部分讨论将在 3.1 节中给予详细介绍。

### 3.1 较近星座点的似然概率计算

本文以 IEEE 标准 802.11a-1999 中的 64QAM 调制方案为例进行表述<sup>[8]</sup>，其中星座图上所有星座点和有限域 GF(64)上所有域元素符号是一一对应的，如图 1 所示。

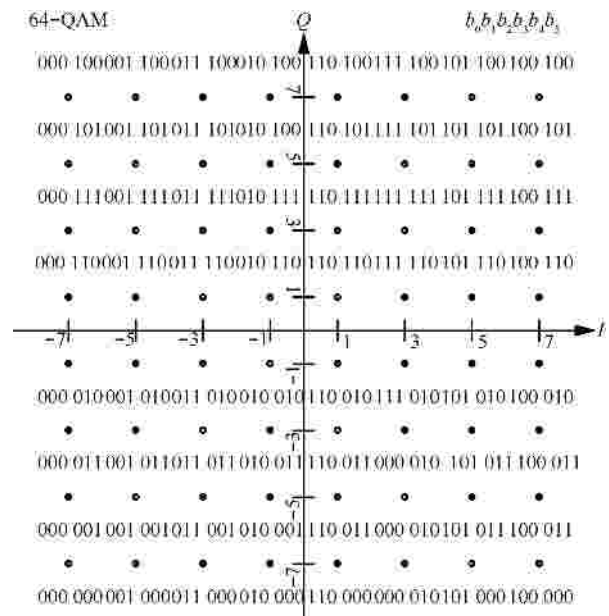


图 1 IEEE Std 802.11a-1999 标准下的 64 QAM 星座映射

距离接收信号  $Y$  最近的 4 个星座点，记为  $M_0, M_1, M_2, M_3$ ，其中距离度量为欧式距离。如图 2 所示。

将  $M_0, M_1, M_2, M_3$  所组成的区域分为 4 个象限，每个象限分为若干小块，以图 2 中第三个子图所示，其中将第二象限分为 16 个小块，记为  $A, B, \dots, P$ ，设每个小块的中心为  $A_{center}, B_{center}, \dots, P_{center}$ ，如图 3 所示。

由 2 节所述，在已知信道参数的情况下，每个分块中心点到邻近 4 个星座点的概率可由式 (4) 计算得出。若接收信号  $Y$  落在小块  $A$ ，记  $Y$  邻近的 4 个星座点  $M_0, M_1, M_2, M_3$  所对应的概率分别

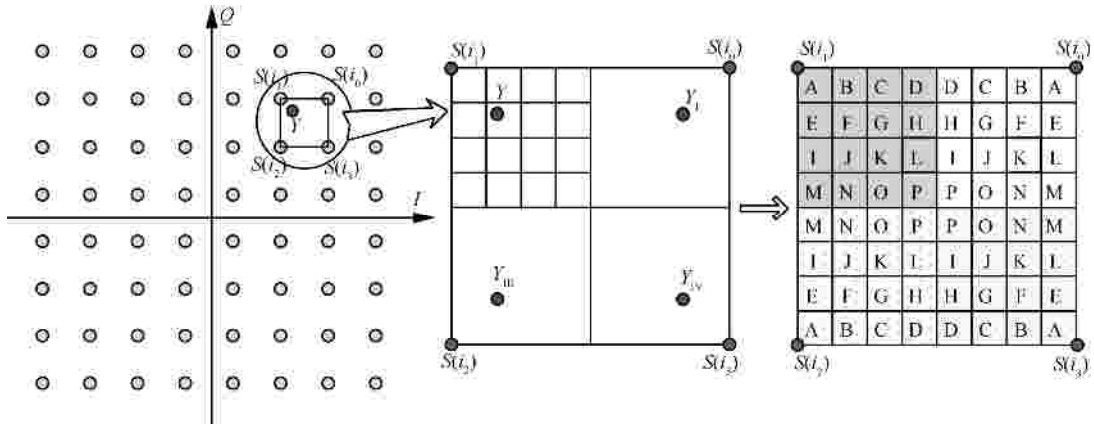


图 2 64 QAM 星座映射图下邻近 4 个星座点似然概率计算的示意

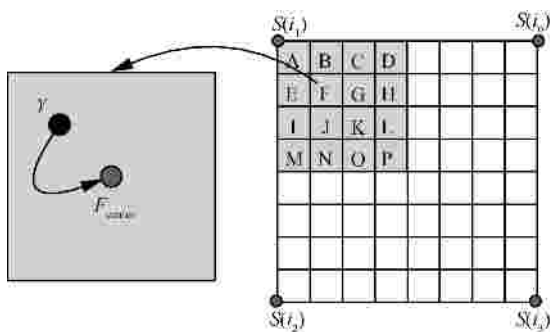


图 3 64 QAM 星座映射下接收信号和分块中心点的关系示意

为  $P_{A0}$ 、 $P_{A1}$ 、 $P_{A2}$ 、 $P_{A3}$ 。同理，当接收信号落在小块 B 至 P 时， $Y$  邻近的 4 个星座点  $M_0$ 、 $M_1$ 、 $M_2$ 、 $M_3$  的概率可同样计算得出。将所有小块中心点到邻近的 4 个星座点的概率计算得出后可存储为一个 LUT。

如图 2 所示，记  $Y_I$ 、 $Y$ 、 $Y_{IV}$  分别代表落在第一象限、第三象限和第四象限的接收信号，由于区域所分成的 4 个象限具有对称性，在实现时只需要存储一个 LUT，当接收信号  $Y$  落在其他象限时，可将  $Y$ 、 $Y_{IV}$  翻转至第二象限的接收信号  $Y$ 。翻转的方法只需要改变接收信号  $Y$  的坐标即可。同理，由于第二象限的所有小块中心到各个邻近星座点的概率已知，根据象限对称性，第一象限、第三象限和第四象限下各个小块中心到各个邻近星座点的概率无需计算，只需要将 LUT 按特定寻址，即可得出所需的对应 4 个星座点的概率值。

因此，将接收信号  $Y$  到邻近 4 个星座点的概率值近似为  $Y$  所在小块的中心点到邻近 4 个星座点的概率值。在实现上，只需要判断接收信号的位置、查询 LUT 和进行特定寻址 3 个步骤。其中特定寻址方式如图 4 所示。

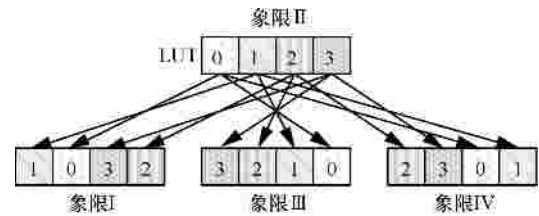


图 4 LUT 中不同象限进行读取地址方法示意

需要注意的是：由于象限的对称性，在实现上只需存储第二象限中所有小块中心到邻近 4 个星座点的概率值，当接收信号落在其他象限时，按图 4 所述的 LUT 寻址方式即可，无需存储第一象限、第三象限和第四象限中的小块中心到邻近 4 个星座点的概率值。举例说明下：当接收信号  $Y_I$  落在第一象限时，如图 1 所示，它在第一象限的镜像为第 F 小块中的  $Y$ ，F 小块的中心为  $F_{center}$ ，如图 3 所示，接收信号  $Y_I$  和  $Y$  的 4 个邻近星座点都为  $M_0$ 、 $M_1$ 、 $M_2$ 、 $M_3$ 。由于 LUT 中只存储有接收信号  $Y$  到 4 个邻近星座点的似然概率值，记为  $P_{F0}$ 、 $P_{F1}$ 、 $P_{F2}$ 、 $P_{F3}$ ，根据图 4 所示的寻址关系，则可得  $Y_I$  到 4 个邻近星座点的似然概率值为  $P_{F1}$ 、 $P_{F0}$ 、 $P_{F3}$ 、 $P_{F2}$ 。关于 Look-Up Table 的大小可以预先算出，若每个象限可分为  $n_s$  块，则 LUT 的大小为  $4n_s$ 。

经过上述的方法，可以将所有落于非第二象限接收信号的最近 4 个星座点的似然概率值经过特定寻址 LUT 获得，但是从第二象限本身又具有自身对称性，如图 5 所示。

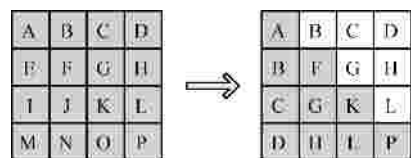


图 5 每个象限的自身对称性示意

从图 5 可以看出, LUT 中存储的似然概率值可以进一步减少, 由原来存储的  $16 \times 4$  个似然概率值减少为  $10 \times 4$  个。进一步推广: 若将每个象限分为  $n_s$  块, 则 LUT 存储的似然概率值由  $4n_s$  个似然概率值减少为  $\frac{n_s + \sqrt{n_s}}{2} \times 4$  个。具体的对称关系和寻址方式如图 6 所示。

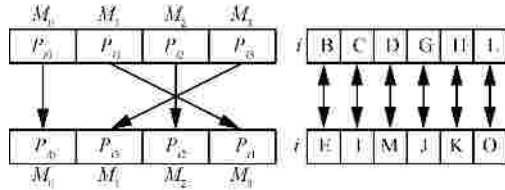


图 6 LUT 中在同一象限进行读取地址方法示意

按本节前文所述的方法, 当接收信号落于非第二象限时, 可将接收信号按对称关系翻转至第二象限, 但是第二象限本身对称性, 因此在设计 LUT 时, 无需将所有分块中心点邻近的 4 个星座点的似然概率值全部存储, 具有对称关系的分块的似然概率值是相同的, 只是其 LUT 中的读地址不同, 从图 6 可以看出, LUT 的读地址关系是固定的。因此, 实现的时候可进一步减小 LUT 的大小。

由于第二象限中所有的小块是沿对角线对称的, 如图 6 所示, 因此分块 B、C、G、H、L 和分块 E、I、M、J、K、O 是一一对应的, 两者只需要存储分块 B、C、G、H、L 的中心点邻近 4 个星座点的似然概率值, 分块 E、I、M、J、K、O 的似然概率值则不需存储, 按照图 6 的方式进行特定地址读取即可。

### 3.2 较远星座点的似然概率计算

对于距离接收信号的较远星座点的似然概率计算, 本文给出一种简单的近似计算方法。对  $M$  QAM 调制而言, 设较远星座点的数量  $n_f$  (对本文的 64 QAM 为例,  $n_n$  为 4, 则  $n_f$  取 60), 如图 7 所示。

首先, 计算接收信号  $Y(x, y)$  和较远星座点之间  $M_i(x_i, y_i)$  的 Manhattan 距离  $r_i$ 。定义

$$r_i(a) = |x - x_i| + |y - y_i| \quad (6)$$

其中,  $a \in \text{GF}(q)$ 。对所有的  $r_i$ , 找出其中最大值  $r_{\max}$ , 则半径  $r$  即为  $r_{\max}$ 。记

$$r \equiv r_{\max} = \max_{a \in \text{GF}(q)} r_i(a) \quad (7)$$

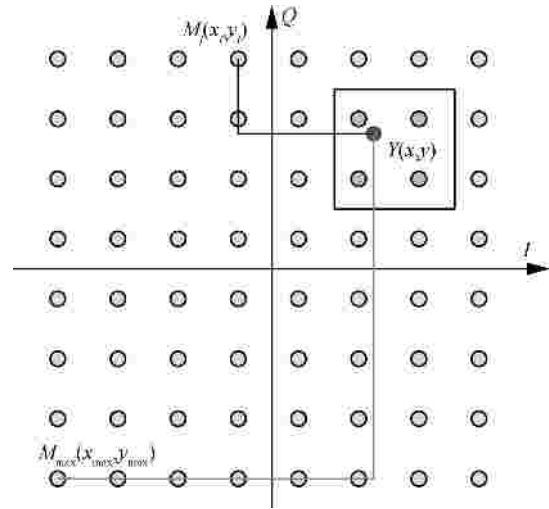


图 7 64 QAM 星座映射图下较远星座点的似然概率计算示意

对任一星座点  $M_i$  所对应的似然概率定义为

$$\begin{aligned} P(M_i) &\cong \frac{r_{\max} - r_i}{r_{\max}} \\ &= 1 - \frac{r_i}{r_{\max}} \\ &= 1 - \frac{|x - x_i| + |y - y_i|}{|x - x_{\max}| + |y - y_{\max}|} \end{aligned} \quad (8)$$

其中,  $1 \leq i \leq n_f, i \in \text{GF}(q)$ 。

### 3.3 归一化因子和缩放因子

由上两节所述的计算, 所有星座点所对应  $\text{GF}(q)$  上  $q$  个有限域元素概率  $P$  的组成可分为两部分:  $P_N$  和  $P_F$ , 令  $P_N = [P_{N_1} \ P_{N_2} \ \dots \ P_{N_{n_n}}]$ ,  $P_F = [P_{F_1} \ P_{F_2} \ \dots \ P_{F_{n_f}}]$ 。常规解调时, 当计算出所有星座点所对应概率  $P$ , 需要对  $P$  进行归一化处理, 令归一化后的概率为  $P^* = xP$ , 其中,  $x$  为归一化因子。

但是本文中  $P_N$  和  $P_F$  的计算是独立的, 本文将分别对  $P_N$  和  $P_F$  分别进行归一化, 设归一化后的概率向量分别为  $P_N^*$  和  $P_F^*$ 。由于  $P_N^*$  和  $P_F^*$  占据总概率和的比重不同, 为使总体概率归一化, 这里引入缩放因子的概念。缩放因子的作用是使两部分似然概率的总和为 1。由于  $\sum P_N^*$  和  $\sum P_F^*$  均为 1, 设  $P_N$  和  $P_F$  的缩放因子分别是  $h$  和  $k$ , 则有

$$h + k = 1, \quad \forall n_n + n_f = M \quad (9)$$

其中,  $M$  为星座图上所有星座点的个数。关于  $h$  和  $k$  的选取, 这里给出一种计算方法: 在精确计算似然概率  $P$  时, 由于  $n_n$  和  $n_f$  已知, 可将精确似然概率

值向量  $P$  按接收信号和星座点之间的欧氏距离分为长度分别为 4 和  $n_f$  的两部分,其中距离接收信号  $Y$  最近的 4 个星座点所对应概率向量为  $P_1$ ,其余  $n_f$  个星座点所对应概率向量为  $P_2$ ,则有

$$h = \frac{\sum P_1}{\sum P}, k = \frac{\sum P_2}{\sum P} \quad (10)$$

分别对两部分星座点的似然概率进行近似运算可得概率向量为

$$P_N^\# = h P_N^*, P_F^\# = k P_F^* \quad (11)$$

则所有星座点所对应  $GF(q)$  上  $q$  个有限域元素的概率组成的近似概率向量  $P^\#$  为

$$P^\# = [P_N^\# P_F^\#] \quad (12)$$

由式 (11) 可得

$$\sum P_N^\# = h \quad \sum P_F^\# = k \quad (13)$$

则有

$$\begin{aligned} \sum P^\# &= \sum [P_N^\# P_F^\#] \\ &= \sum P_N^\# + \sum P_F^\# \\ &= h + k \\ &= 1 \end{aligned} \quad (14)$$

至此,则完成对所有星座点所对应  $GF(q)$  上  $q$  个有限域元素的概率的归一化操作,将最终所得概率向量送入译码器进行译码。

这里要说明:由上文的讨论可以看出,缩放因子随着信噪比的变化而变化,同二元 LDPC 的归一化译码算法中归一化因子和偏移因子的确定方法一样。但是在实现中,若缩放因子每轮迭代都随着信噪比的变化而变化,这样不利于算法的硬件实现。在实际应用中,通常是通过仿真来确定固定的缩放因子并保持不变,从而达到性能和复杂度之间的平衡。

#### 4 仿真结果和复杂度分析

本节通过对 3 种码字的仿真,对所提出的似然概率生成算法在多元 LDPC 和积译码算法和扩展最小和译码算法下的性能进行了验证仿真。使用加性高斯白噪声 (AWGN) 信道模型,64 QAM 调制,最大迭代次数为 50 次。仿真实验包括:缩放因子的选取;所生成的近似似然概率值和精确似然概率值分别在不同译码算法下的性能比较。本节最后给

出所提出的近似似然概率生成算法和精确似然概率生成算法之间的计算复杂度比较。

仿真 1:采用文献[17]中构造的一个  $GF(64)$  上的非规则多元 LDPC 码字,码长为 1008 bit,码率为 1/2,最大行重和列重分别为 6 和 3,调制方式为 64 QAM,信道为加性高斯白噪声 (AWGN) 信道。对接收信号附近  $n_m$  个星座点所对应的有限域  $GF(q)$  上的  $n_m$  个域元素的概率进行精确计算,接收信号能量与噪声功率谱密度比  $E_b/N_0$  的取值范围为 2~10 dB。首先对星座图上的所有星座点进行解调,可得到每个星座点的似然概率值,然后对所有似然概率值进行归一化处理,将接收信号附近的 1~ $n_m$  个星座点的似然概率值分别进行求和,图 8 中的纵坐标表示  $n_m$  个似然概率求和后占总的似然概率值的百分比。

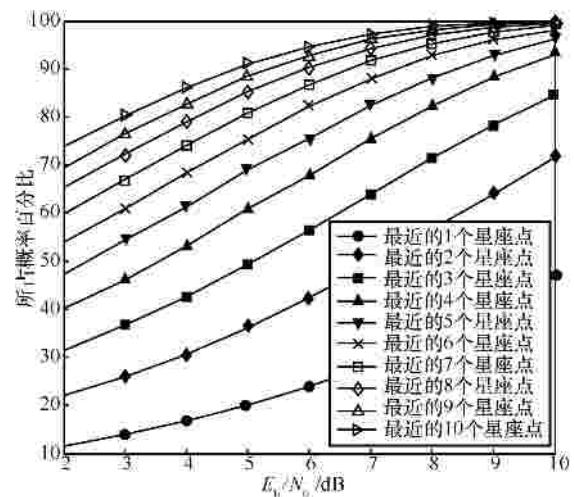


图 8 64 QAM 星座映射下最近若干星座点的似然概率占似然概率总和的百分比示意

从图 8 可以看出,当  $E_b/N_0$  取 6dB 时,接收信号最近的 4 个星座点所对应的概率和占总概率和为 67.78%,即其余的 60 个星座点所对应的概率的和占所总概率和为 32.22%,按 3.3 节所述,当对这两部分星座点所对应的概率值进行缩放时,缩放因子  $h$  和  $k$  分别取 0.68 和 0.32。同理,当  $E_b/N_0$  取 7 dB 时,缩放因子  $h$  和  $k$  分别取 0.76 和 0.24。这里要说明:当硬件实现时,随着  $E_b/N_0$  的变化,通常将缩放因子设为一个固定值。

仿真 2:采用文献[18]中构造的一个  $GF(64)$  上的非规则多元 LDPC 码字,码长为 1044 bit,码率为 1/2,校验矩阵的最大行重和列重分别为 6 和 3,调制方式为 IEEE Std 802.11a-1999 标准下的 64 QAM,信道为 AWGN 信道,译码算法采用多元 LDPC 的和积译码

算法和 EMS 译码算法,对码字的误比特率 (BER, bit error rate) 的性能进行比较,如图 9 所示。

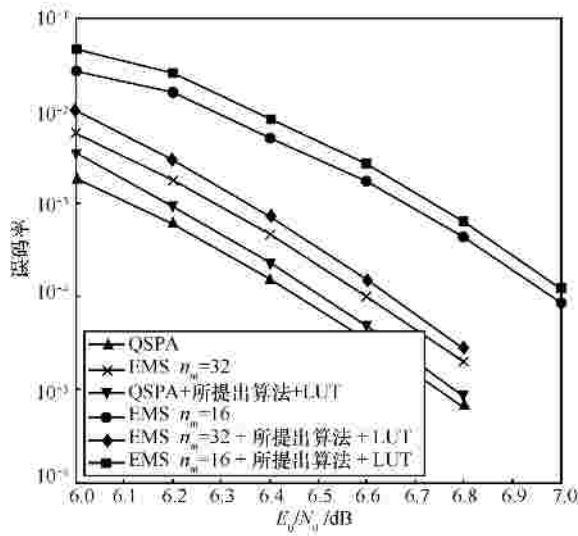


图 9 所提出的近似概率生成算法和精确解调在 64-QAM 各种译码算法下的 BER 性能

仿真 3:考虑一个基于有限域构造的 GF(16) 上的(225,173) LDPC 码<sup>[7]</sup>,其信息块长度为 173 个符号,编码后的码字含有 225 个符号。其码率为  $R = 0.7689$ ,等效的二进制比特长度为 900。其校验矩阵的行重为 15,列重分别为 3 和 6。采用 IEEE Std 802.11a-1999 标准下的 16-QAM 时,若译码器前端同时本文所示的似然概率生成算法,选取接收信号最近的 4 个星座点,译码算法采用 QSPA 算法,且最大迭代次数设定为 50,那么采用本文所提出的似然概率生成算法和标准似然概率生成算法在 QSPA 下的 BER 性能对比如图 10 所示。

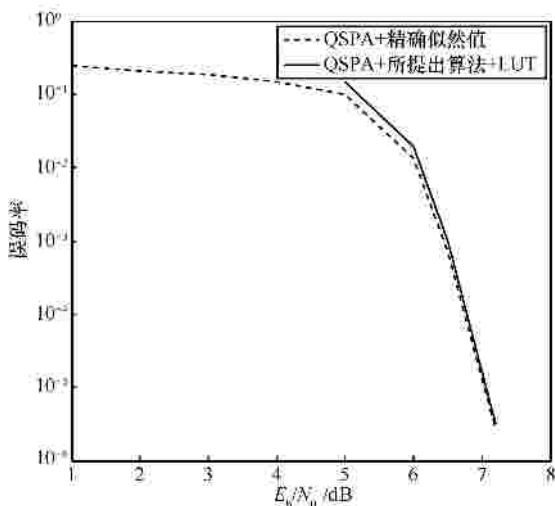


图 10 所提出的近似概率生成算法和精确解调在 16-QAM 时 QSPA 译码算法下的 BER 性能

本文对距离接收信号最近的 4 个星座点所对应的似然概率分别采用了精确计算方法和 3.1 节所述的方法,对较远的星座点所对应的似然概率采用 3.2 节所述的方法。从图 9 中可以看出,只对较远的星座点所对应的似然概率采用 3.2 节所述的生成方法和全部采用精确似然概率值的解调方法在 QSPA 译码算法下的性能曲线随着  $E_b/N_0$  的增加越来越接近,其 BER 曲线在  $10^{-4}$  时,与理论曲线之间的差距只有不到 0.05 dB。若采用对最近的 4 个星座点和较远的星座点所对应的似然概率生成都采用 3.1 节和 3.2 节所述的方法,其 BER 曲线在  $10^{-4}$  时,与理论曲线之间的差距有 0.1 dB。当采用其他较低进制调制,如图 10 所示的 16-QAM 调制时,其译码性能与理论解调时的译码性能差距将变得更小。因此可以得出结论:本文所提出的近似似然概率生成算法在译码算法的性能上损失较小。

下面针对在采用  $q$ -QAM 调制的多元 LDPC 编码调制系统,使用本文所提出的近似似然概率生成算法下的复杂度进行分析,与其对比的是常规解调算法所得的精确似然概率值,如表 1 所示。

表 1 不同概率生成算法所需的计算复杂度比较

概率生成算法	+	*	÷	exp	LUT
本文提出算法	$5q-21$	$2q-4$	1	0	4
精确解调算法	$4q-1$	$5q$	$2q+1$	$q$	0

由表 1 可以看出,本文所提出的近似似然概率生成算法,对每个接收信号的进行解调时与精确似然概率生成算法相比,本文所提出的算法在实数域上的加、减、乘、除法及指数运算所需的运算量都是最小的。尤其在高阶调制方案下,对硬件实现影响最大的乘除法和指数运算上,本文所提出的近似似然概率生成算法分别比精确似然概率生成算法可减少 70% 以上的运算量。

### 5 结束语

在多元 LDPC 编码调制系统中,尤其采用高阶调制方案时,接收端通常需要计算接收信号的似然概率以便进行译码操作。针对精确似然计算概率的方法的复杂度过高问题,本文提出了一种复杂度低且快速生成近似似然概率的算法。所提出的算法采用了一种分块近似逼近算法,能够以较低复杂度且快速的生成译码器所需要的概率度量。仿真结果表明,本文所提出的分块近似似然概率生成算法与精

确似然概率生成算法相比性能损失较小。此外，本文所提出算法的运算复杂度较低，由于采用对星座点所对应的似然概率进行分块的计算方式，在硬件实现上可以采用流水线结构，能提高译码器的译码速度和吞吐量。因此本文所提出的算法不仅为多元 LDPC 码的应用提供了一个良好的理论支撑，也具有一定的工程价值。

#### 参考文献：

- [1] GALLAGER R G. Low-density parity-check codes[J]. IRE Trans Information Theory, 1962, 8(1):21-28.
- [2] DAVEY M C, MACKAY D J C. Low density parity check codes over  $GF(q)$ [J]. IEEE Commun Lett, 1998, 2(6):165-167.
- [3] HASSANI S, HAMON M, P'ENARD P. A comparison study of binary and non-binary LDPC codes decoding[A]. Proc Software, International Conference on Telecommunications and Computer Networks[C]. Dalmatia, Croatia, 2010. 355-359.
- [4] HU X Y, ELEFTHERIOU E. Binary representation of cycle tanner-graph  $GF(2q)$  codes[A]. Proc IEEE Int Conf Commun[C]. Paris, France, 2004. 528-532.
- [5] LI G, FAIR I J, KRZYMIEN W A. Density evolution for non-binary LDPC codes under gaussian approximation[J]. IEEE Trans Inform Theory, 2009, 55(3):997-1015.
- [6] ZENG L, LAN L, TAI Y, *et al.* Constructions of nonbinary quasi-cyclic LDPC codes: a finite field approach[J]. IEEE Trans Commun, 2008, 56(4):545-554.
- [7] ZENG L, LAN L, TAI Y, *et al.* Constructions of nonbinary quasi-cyclic LDPC codes: a finite geometry approach[J]. IEEE Trans Commun, 2008, 56(3):378-587.
- [8] Supplement to IEEE Standard for Information Technology-Telecommunications and Information Exchange Between Systems-Local and Metropolitan Area Networks-Specific Requirements, Part 11: Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications: Higher-Speed Physical Layer Extension in the 5 GHz Band[S]. 2003.
- [9] MACKAY D J C, DAVEY M C. Evaluation of gallager codes short block length and high rate application[A]. Proc IMA International Conference on Mathematic and Its Applications: Codes, Systems and Graphical Models[C]. New York, USA, 2000. 113-133.
- [10] DECLERCQ D, FOSSORIER M. Extended min-sum algorithms for decoding LDPC codes over  $GF(q)$ [J]. IEEE Trans Inform Theory, 2007, 55(4):633-643.
- [11] VOICILA A, DECLERCQ D, VERDIER F, *et al.* Low-complexity decoding for non-binary LDPC codes in high order fields[J]. IEEE Transactions on Communications, 2010, 58(5):1355-1375.
- [12] WANG X, BAI B, MA X. A low-complexity joint detection-decoding algorithm for nonbinary LDPC-coded modulation systems[A]. International Symposium on Information Theory (ISIT 2011)[C]. Austin, 2010. 794-798.
- [13] ZHAO D, MA X, CHEN C, *et al.* A low complexity decoding algorithm for majority-logic decodable nonbinary LDPC codes[J]. IEEE Commun Lett, 2010, 14(11):1062-1064.
- [14] SARKIS G, MANNOR S, GROSS W J. Stochastic decoding of LDPC codes over  $GF(q)$ [A]. Proc IEEE ICC '09[C]. Dresden, 2009. 1-5.
- [15] YAZDANI R, ARDAKANI M. Piecewise linear LLR approximation for non-binary modulations over gaussian channels with unknown noise variance[A]. 2010 IEEE 17th International Conference on Telecommunications (ICT 2010)[C]. Doha, 2010. 1-7.
- [16] YAZDANI R, ARDAKANI M. Efficient LLR calculation for non-binary modulations over fading channels[J]. IEEE Trans Commun, 2011, 59(5):1236-1241.
- [17] WANG X X, MA X. A class of generalized LDPC codes with fast parallel decoding algorithms[J]. IEEE Commun Lett, 2009, 13(7):531-533.
- [18] LIN W, BAI B, LI Y, *et al.* Design of q-ary irregular repeat-accumulate codes[A]. International Conference on Advanced Information Networking and Applications (AINA 2009)[C]. Bradford, 2009. 201-206.
- [19] POUILLIAT C, FOSSORIER M, DECLERCQ D. Design of regular  $(2, d_c)$ -LDPC codes over  $GF(q)$  using their binary images[J]. IEEE Trans Commun, 2008, 56(3):1626-1635.

#### 作者简介：



何光华 (1984-), 男, 黑龙江鹤岗人, 西安电子科技大学博士生, 主要研究方向为信道编码与调制、无线通信等。



白宝明 (1966-), 男, 山西大同人, 西安电子科技大学教授、博士生导师, 主要研究方向为无线通信、信道编码、量子通信等。

马啸 (1966-), 男, 河南焦作人, 中山大学教授、博士生导师, 主要研究方向为信息论、编码论、无线通信系统及数字存储中的编码技术。

黎昞 (1983-), 男, 陕西长武人, 西安电子科技大学博士生, 主要研究方向为信道编码与调制、多用户信息论等。